Грани кубиков

При разрезании куба на части сохраняется *объём*: сумма объёма частей равна объёму целого. Не забываем считать все объёмы в одних и тех же единицах.

1. Кубический дециметр разрезали на меньшие кубики со стороной 1 и 2 см. Кубиков со стороной 1 см в два раза больше, чем кубиков со стороной 2 см. Сколько всего частей?

2. Серый куб 5x5x5 распилили на кубики 1x1x1. Плоскости распила – белые. Сколько получилось кубиков
а) всего; **б)** с четырьмя серыми гранями; **в)** с тремя серыми гранями; **г)** без серых граней; **д)** с одной серой гранью; **е)** с двумя серыми гранями?

Если у кубиков разное число граней какого-то цвета, они, конечно, окрашены по разному. А если граней каждого цвета поровну?...

3. Несколько кубических коробочек (с крышками) вкладываются одна в другую как матрёшки.
а) У двух из этих коробочек покрасили грани: по две в серый, остальные – в белый цвет. Обязательно ли одну коробочку можно вложить в другую так, чтобы примыкали друг к другу только грани одинакового цвета?
б) У трёх из этих коробочек покрасили грани: по три в серый и белый цвет. Обязательно ли можно выбрать две коробочки и вложить одну в другую так, чтобы примыкали друг к другу только грани одинакового цвета?

Скажем, что грани двух кубиков *покрашены одинаково*, если соответственно раскрашенные коробочки можно вложить друг в друга так, чтобы цвета примыкающих граней совпали. То же, если вместо раскраски грани пронумерованы. Другими словами: кубики покрашены одинаково, если их можно поставить так, чтобы совпали цвета одинаково расположенных граней: верхней, нижней, правой, левой, передней (фасада), задней (тыла).

4. Грани нескольких кубов пронумерованы от 1 до 6 у каждого так, что сумма номеров на противоположных гранях равна 7. Какое наибольшее число кубов может быть пронумеровано по-разному?

Выявление и подсчёт *узких мест* позволяет доказать невозможность конструкции.

5. а) У Златы есть 27 единичных белых кубиков. Она хочет сложить из них куб со стороной 3, белый снаружи. Какое наименьшее число *кубиков* может испачкать проказник Ваня так, чтобы Златина мечта не сбылась?
б) У Златы есть 8 единичных белых кубиков. Она хочет сложить из них куб со стороной 2, белый снаружи. Какое наименьшее число *граней* может испачкать проказник Ваня так, чтобы Златина мечта не сбылась?

Зачётные задачи

ГК1. Грани куба пронумерованы от 1 до 6.
а) Для каждого ребра посчитали сумму номеров двух содержащих его граней. Наибольшая из сумм оказалась равна 10. Какой номер у грани, противоположной грани номер 5?
б) Для каждой вершины посчитали сумму номеров трёх содержащих её граней. Наибольшая сумма равна 13. Чему равна наименьшая сумма?

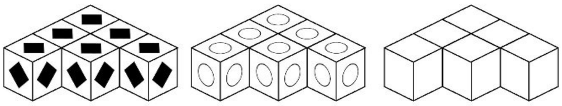
ГК2. Серый кубик 4x4x4 распилили на кубики 1x1x1, плоскости распила – белые. Из всех кубиков сложили меньшие кубы 2x2x2.
а) Какое наибольшее число малых кубов могут быть серыми снаружи?
б) Какое наибольшее число малых кубов могут быть белыми снаружи?

ГК3. У какого наибольшего числа кубов можно раскрасить грани в красный и синий цвет (возможно, что все грани – в один цвет) так, чтобы любые два куба были раскрашены по-разному?

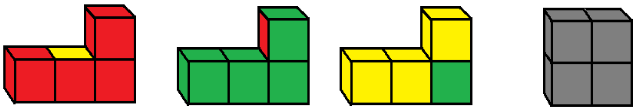
ГК4. Имеется 40 параллелепипедов 1x1x2 (каждый склеен из двух единичных кубиков). Можно ли их поверхность покрасить в 4 цвета так, чтобы для любого из этих цветов можно было сложить параллелепипед 4x4x5 с поверхностью этого цвета?

ГК5. Есть 27 игральных кубиков, грани каждого пронумерованы от 1 до 6. Из них сложили куб со втрое большим ребром, при этом сумма чисел на каждой паре примыкающих граней одна и та же. Чему она может быть равна?

ГК6. а) У Феди было несколько раскрашенных кубиков. Он по очереди сложил из них и сфотографировал 3 фигуры (см. рис.). Какое наименьшее число кубиков могло быть у Феди?



б) У Артёма было 4 раскрашенных кубика. Расставляя их по-разному, он по очереди сфотографировал три вот такие Г-образные фигуры (см. рис.). Затем он сложил параллелепипед 2x2x1 и сделал его черно-белое фото (см. рис.). Все видимые на фото грани параллелепипеда — одинакового цвета. Какой цвет это может быть?



ГК7. а) Имеется 125 единичных кубиков. Проказник гном должен покрасить каждую грань каждого кубика либо в черный, либо в белый цвет. Белоснежка мечтает из всех кубиков сложить куб со стороной 5, у которого клетки каждой грани одноцветны (но разные грани могут быть разного цвета). Может ли гном покрасить кубики так, чтобы Белоснежкина мечта не сбылась?
б) У Белоснежки есть 27 единичных белых кубиков. Она мечтает сложить из них куб со стороной 3, белый снаружи. Какое наименьшее число *граней* может испачкать проказник гном так, чтобы Белоснежкина мечта не сбылась?

ГК8. Из 8 кубиков, чьи грани одинаково пронумерованы от 1 до 6, сложен куб 2x2x2. Известно, что на каждой паре прилегающих граней двух кубиков сумма – простое число.
а) Какова наибольшая возможная сумма чисел на поверхности куба?
б) а наименьшая?